Задания школьной олимпиады по математике для 10 класса

1. (*Старинная задача*) Сто мер хлеба разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше остальных. Сколько нужно дать каждому?
2. В трапеции *ABCD* с основаниями *АВ* и *CD* диагонали пересекаются в точке *Е*. Площадь треугольника *АВЕ* равна 72, площадь треугольника *CDE* равна 50. Найдите площадь трапеции *ABCD*.
3. При каких значениях параметра $b$ оба корня уравнения $x^{2}-6bx+\left(2-2b+8b^{2}\right)=0$ больше 3?
4. Десять машин выпускают одинаковые резиновые мячи массой по 10г каждый. Одна из машин испортилась и стала выпускать мячи по 5г. Как найти испортившуюся машину с помощью одного взвешивания мячей?
5. Решить систему уравнений: $\left\{\begin{array}{c}\left|x+2y\right|=\frac{1}{2-y},\\\left|x+2y\right|=y. \end{array}\right.$

Решения (10 класс):

1. (*Старинная задача*) Сто мер хлеба разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше остальных. Сколько нужно дать каждому?

Решение. Очевидно, количества хлеба, полученные участниками раздела, составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть первый ее член *х*, разность *у*. Тогда доля первого х

доля второго х + у

доля третьего х + 2у

доля четвертого х + 3у

доля пятого х + 4у

На основании условий задачи составляем следующую систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c}x+\left(x+y\right)+\left(x+2y\right)+\left(x+3y\right)+\left(x+4y\right)=100,\\7\left(x+(x+y)\right)=\left(x+2y\right)+\left(x+3y\right)+\left(x+4y\right); \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}x+2y=20,\\11x=2y; \end{array}\right.$$

$\left\{\begin{array}{c}x=1\frac{2}{3},\\y=9\frac{1}{6}.\end{array}\right.$

Значит, хлеб должен быть разделен на следующие части: $1\frac{2}{3};$ $10\frac{5}{6}$; 20; $ 29\frac{1}{6}$; $ 38\frac{1}{3}$.

Ответ: $1\frac{2}{3};$ $10\frac{5}{6}$; 20; $ 29\frac{1}{6}$; $ 38\frac{1}{3}$.

1. В трапеции *ABCD* с основаниями *АВ* и *CD* диагонали пересекаются в точке *Е*. Площадь треугольника *АВЕ* равна 72, площадь треугольника *CDE* равна 50. Найдите площадь трапеции *ABCD*.

Решение. Треугольники *АВЕ* и *CDE* подобны по двум углам при основании. Поскольку площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон, то

*ВЕ2 : DЕ2 = 72 : 50*, откуда *ВЕ : DЕ = 6 : 5.* Так как в треугольниках *ВСЕ* и *DCE* стороны *ВЕ* и *DE* лежат на одной прямой и вершина С, то их площади относятся как основания,

*А*

*В*

*С*

*D*

*E*

т.е. *SBCE : SDCE = BE : DE = 6 : 5*. Откуда *SBCE = 6 : 5* $∙ $*50 = 60.*

Таким образом, площадь трапеции *ABCD* равна

*SABCD  = 72 + 50 + 60 + 60 = 242*.

1. При каких значениях параметра $b$ оба корня уравнения $x^{2}-6bx+\left(2-2b+8b^{2}\right)=0$ больше 3?

Решение.

Должны выполняться условия:

$\left\{\begin{array}{c}D=8b-8>0, \\x\_{в}=\frac{6b}{2}>3, \\f\left(3\right)=9b^{2}-20b+11>0;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}b>1, \\b>\frac{11}{9}.\end{array}\right.$ $b>\frac{11}{9}$.

Ответ: $b>\frac{11}{9}$.

1. Десять машин выпускают одинаковые резиновые мячи массой по 10г каждый. Одна из машин испортилась и стала выпускать мячи по 5г. Как найти испортившуюся машину с помощью одного взвешивания мячей?

Решение. Возьмем от первой машины один мяч, от второй – два, от третьей – три и т.д., от десятой – десять. Найдем их общую массу. Это взвешивание будет единственным. Если бы все мячи были массой по 10г, то весы показали бы 10 ⋅ (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 550г.

Если первая машина допускает брак, то общая масса станет меньше на 5г, если вторая, то на 10г, и т.д., если десятая, на 50г. Таким образом, по массе 55 мячей можно узнать, какая машина испортилась.

1. Решить систему уравнений: $\left\{\begin{array}{c}\left|x+2y\right|=\frac{1}{2-y},\\\left|x+2y\right|=y. \end{array}\right.$

Решение.

 $\left\{\begin{array}{c}\left|x+2y\right|=\frac{1}{2-y},\\\left|x+2y\right|=y; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}y=\frac{1}{2-y}, \\\left|x+2y\right|=y; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}y=1, \\\left|x+2\right|=1; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x=-1,\\y=1; \end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{c}x=-3,\\y=1. \end{array}\right.$

Ответ: $(- 1; 1); (- 3; 1)$.